## **基础课48 抛物线**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 抛物线的定义和标准方程 | 了解 | 2023年天津卷  2019年全国Ⅱ卷（理） | ★★☆ | 逻辑推理数学运算 |
| 抛物线的几何性质 | 了解 | 2023年新高考Ⅱ卷  2023年全国乙卷（理）  2023年全国乙卷（文） | ★★★ | 逻辑推理数学运算直观想象 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，抛物线一直是高考命题的热点，选择题、填空题的复习要关注抛物线的定义、焦点弦的性质在解题中的应用；解答题的复习要关注设而不求以及根与系数的关系在解题中的应用.另外本基础课内容易设置多选题，所以在备考中，要注意多选题的训练，做到全面高效的复习 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

##### **一、抛物线的定义**

1.定义：平面内与一个定点和一条定直线不经过点的距离①相等的点的轨迹.

2.焦点：②点叫作抛物线的焦点.

3.准线：③直线叫作抛物线的准线.

【提醒】定义中易忽视“不经过点”这一条件，当经过点时，动点的轨迹是过定点且与定直线垂直的直线.

##### **二、抛物线的标准方程和几何性质**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 标准方程 |  |  |  |  |
| 图形 |  |  |  |  |
| 顶点 |  | | | |
| 对称轴 | ⑤轴 | | ⑥轴 | |
| 焦点 |  |  |  |  |
| 离心率 | 1 | | | |
| 准线方程 |  |  |  |  |
| 范围 | , | , | , | , |
| 标准方程 |  |  |  |  |
| 开口方向 | 向右 | 向左 | 向上 | 向下 |
| 焦半径其中为抛物线上任一点 |  |  |  |  |

###### **知识 拓展**

抛物线的几个常用结论

设是过抛物线的焦点的弦，则

1.以为直径的圆与准线相切;

2.以为直径的圆与轴相切；

3.以为直径的圆与轴相切;

4.圆与圆外切，圆与圆均与圆内切.

#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） 平面内与一个定点和一条定直线的距离相等的点的轨迹一定是抛物线.( × )

（2） 方程表示的曲线是焦点在轴上的抛物线,且其焦点坐标是,,准线方程是.( × )

（3） 抛物线既是中心对称图形,又是轴对称图形.( × )

（4） 是过抛物线的焦点,的弦,若,,则,,弦长.( √ )

2. （易错题）已知为抛物线上的一个动点，为圆上一个动点，则点到点的距离与点到轴的距离之和的最小值为1.

**【易错点】**本题在将点到轴的距离转化为点到抛物线焦点的距离时容易出现错误.

[解析]设抛物线的焦点坐标为，圆心坐标为，点在准线上的射影为，则，因为,所以,因为,所以，当且仅当,,,共线且依序排列时取等号，所以点到点的距离与点到轴的距离之和的最小值为.

##### **题组2 走进教材**

3. （多选题）（人教A版选修①P135·思考改编）过点的抛物线的标准方程为( AC ).

A. B. C. D.

[解析]当抛物线的焦点在轴上时，设抛物线的方程为，则，解得，所以抛物线的方程为;当抛物线的焦点在轴上时，设抛物线的方程为，将点代入，得,解得,所以抛物线的方程为.故选.

4. （苏教版选修①P104·T5改编）若抛物线上的一点到焦点的距离为1，则点的纵坐标是.

[解析]设点的纵坐标为,抛物线的焦点坐标为，则，,所以点的纵坐标为.

##### **题组3 走向高考**

5. [2023·北京卷]已知抛物线的焦点为，点在上.若到直线的距离为5，则( D ).

A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

[解析]因为抛物线的焦点为，准线方程为，点在上，所以到准线的距离为，又到直线的距离为5，所以，故.故选.

### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 抛物线的定义及应用［自主练透］**

1. 若动点满足方程，则点的轨迹是( D ).

A. 圆 B. 椭圆 C. 双曲线 D. 抛物线

[解析]由得，

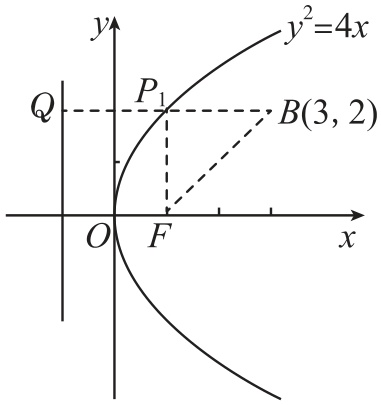
等式左边表示点和点之间的距离，等式的右边表示点到直线的距离，整个等式表示的意义是点到点的距离和到直线的距离相等，且点不在直线上，所以其轨迹为抛物线.故选.

2. [2023·全国乙卷]已知在抛物线上，则点到抛物线的准线的距离为.

[解析]因为点在抛物线上，所以，解得，则抛物线方程为，其准线方程为，则点到抛物线的准线的距离为.

3. 设是抛物线上的一个动点，为抛物线的焦点，若，则的最小值为4.

[解析]如图，过点作垂直于准线，交准线于点,交抛物线于点,连接，则.又,所以,即的最小值为4.





**抛物线定义应用的三种类型及解题策略**

|  |  |
| --- | --- |
| 轨迹问题 | 用抛物线的定义可以确定与定点、定直线的距离有关的动点轨迹是否为抛物线 |
| 距离问题 | 灵活地进行抛物线上的点到焦点的距离与其到准线的距离间的等价转化 |
| 最值问题 | 将抛物线上的点到焦点（准线）的距离转化为该点到准线（焦点）的距离，构造出“两点之间线段最短”或利用“与直线上所有点的连线中，垂线段最短”求解问题 |

【注意】利用定义时一定要验证“定点”是否在“定直线”上.

#### **考点二 抛物线的标准方程［师生共研］**

典例1 求分别满足下列条件的抛物线的标准方程：

（1）顶点在原点，准线方程为；

（2）顶点在原点，且过点；

（3）顶点在原点，对称轴为轴，焦点在直线上；

（4）顶点在原点，焦点在轴上，且抛物线上一点到焦点的距离为5.

[解析]（1）由顶点在原点，准线方程为，可知抛物线的焦点在轴负半轴上，设抛物线的标准方程为,且，故抛物线的标准方程为.

（2）由顶点在原点，且过点，则抛物线焦点可能在轴正半轴或轴负半轴上，则设抛物线的标准方程为或，分别将代入，求得,，故抛物线的标准方程为或.

（3）由于直线与轴的交点为，由题意可知抛物线焦点为，设抛物线的标准方程为，则，故抛物线的标准方程为.

（4）设抛物线方程为，焦点为,，准线方程为，由题意知，抛物线焦点在轴上，且抛物线上一点到焦点的距离为5，得，故抛物线的标准方程为.



**求抛物线标准方程的两种方法**

|  |  |
| --- | --- |
| 定义法 | 根据抛物线的定义，确定的值（系数是指焦点到准线的距离），再结合焦点位置求出抛物线方程 |
| 待定系数法 | 若题目未给出抛物线的方程，对于焦点在轴上的抛物线的标准方程可统一设为，的正负由题设来定；焦点在轴上的抛物线的标准方程可设为，这样减少了不必要的讨论 |

##### **针对训练**

1. [2024·新疆模拟]若抛物线的焦点也是双曲线的一个焦点，则此抛物线的方程为( B ).

A. B. C. D.

[解析]抛物线的焦点为,，双曲线可化简为，其焦点坐标为，由题意可得，即，解得，则此抛物线的方程为.故选.

2. [2024·浙江模拟]写出一个既与直线相切，又和圆外切的圆的圆心坐标：答案不唯一，只要圆心坐标满足即可.

[解析]设圆心坐标为，将圆化为，其圆心为，半径为1，由题意得，，即，

故圆心到的距离与到直线的距离相等，

所以圆心的轨迹是以为焦点的抛物线，故，圆心坐标满足该式即可.

#### **考点三 抛物线的简单几何性质［师生共研］**

典例2（1） [2023·新高考Ⅱ卷]（多选题）设为坐标原点，直线过抛物线的焦点，且与交于，两点，为的准线，则( AC ).

A. B.

C. 以为直径的圆与相切 D. 为等腰三角形

[解析]对于，在中令，得，所以抛物线的焦点为，所以，所以，故正确；

对于，由知，抛物线的方程为，则由

得或不妨设,，，

则由抛物线的定义，得，故不正确；

对于，由可知，以为直径的圆的圆心为点，半径为，又抛物线的准线的方程为，圆心到准线的距离为，所以以为直径的圆与相切，故正确；

对于，因为，所以由抛物线的对称性知不是等腰三角形，故不正确.故选.

（2） [2022·新高考Ⅰ卷]（多选题）已知为坐标原点，点在抛物线上，过点的直线交于，两点，则( BCD ).

A. 的准线方程为 B. 直线与相切

C. D.

[解析] 点在抛物线上，，得，

准线方程为，不正确.

直线的方程为，由得，

， 直线与抛物线相切，正确.

设直线的方程为，，.

由得,，得,

，.

. 又，，正确.

,，，正确.

故选.



**抛物线性质的应用技巧**

1.利用抛物线方程确定及应用其焦点、准线时，关键是将抛物线方程化成标准方程；

2.要注意利用几何图形形象、直观的特点来解题，特别是涉及焦点、顶点、准线的问题，注意抛物线上点到焦点的距离与到准线的距离的转化，关注图中的直角梯形（直角三角形）.

##### **针对训练**

1. [2022·新高考Ⅱ卷]（多选题）已知为坐标原点，过抛物线的焦点的直线与交于，两点，其中点在第一象限，点.若，则( ACD ).

A. 直线的斜率为 B.

C. D.

[解析]对于，设的中点为，则，所以，

所以，故，故正确.

对于，，所以，所以，故错误.

对于，，故正确.

对于,由，知，，，，所以，，，所以为钝角.

又，所以为钝角，所以 ，故正确.故选.

2. 设为抛物线的焦点，点在上，点，若，则.

[解析]由题意得，，则，

即点到准线的距离为2，所以点的横坐标为.

不妨设点在轴上方，代入得，

所以.